

# Signature of shadows in stochastic signals from black hole candidates

## ブラックホールによる波の散乱と干渉効果

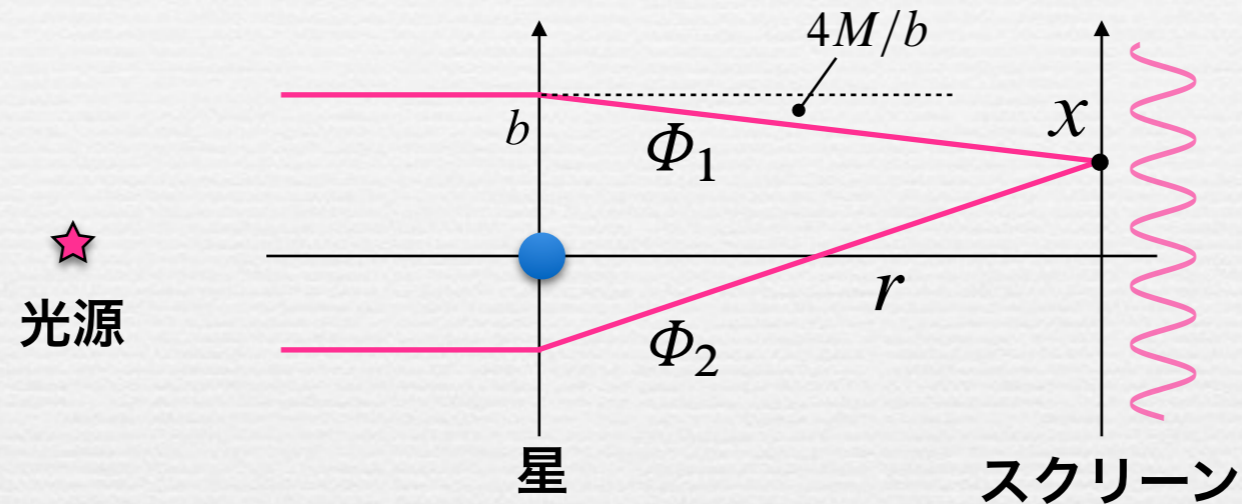
名古屋大学 南部保貞

2014/10/5 第24回BH地平面勉強会@山口市 (湯田温泉 喜良久)

# Wave Effect in Gravitational Lensing

干渉効果を用いて重力源の構造を探る

## ■ Weak lensing (weak gravitational field)



$\Phi_1, \Phi_2$  の干渉により干渉縞が作られる

光路長の差

$$\Delta \ell = x \sqrt{\frac{4M}{r}}$$

スクリーン上での強度

$$|\Phi|^2 = |\Phi_1 + \Phi_2|^2 \propto 1 + \cos \left( \omega \sqrt{\frac{4M}{r}} x \right)$$

干渉効果が見えるための条件は？

光源のコヒーレンス時間が光路長差より長い

# Temporal coherence of signal

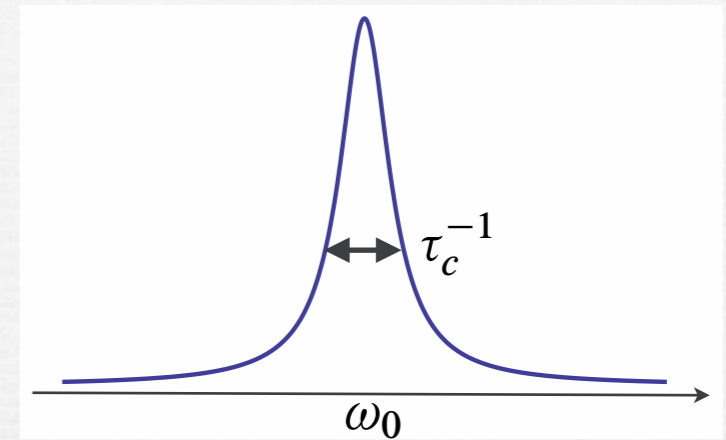
$$\Phi_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} a(\omega)$$

random variable

$$\begin{aligned} \langle a^*(\omega_1) a(\omega_2) \rangle \\ = \delta(\omega_1 - \omega_2) S_0(\omega_1) \end{aligned}$$

power spectrum

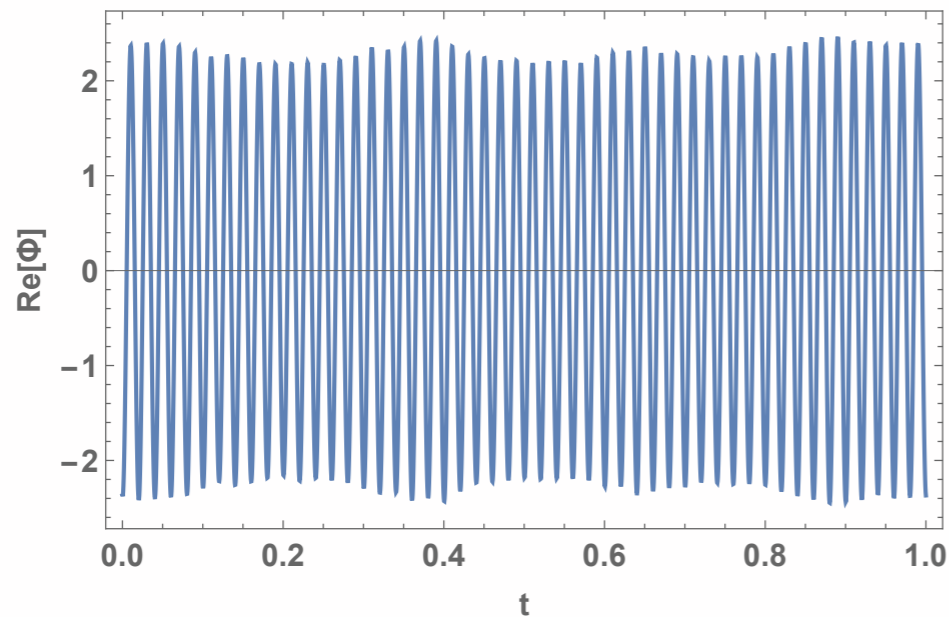
power spectrum



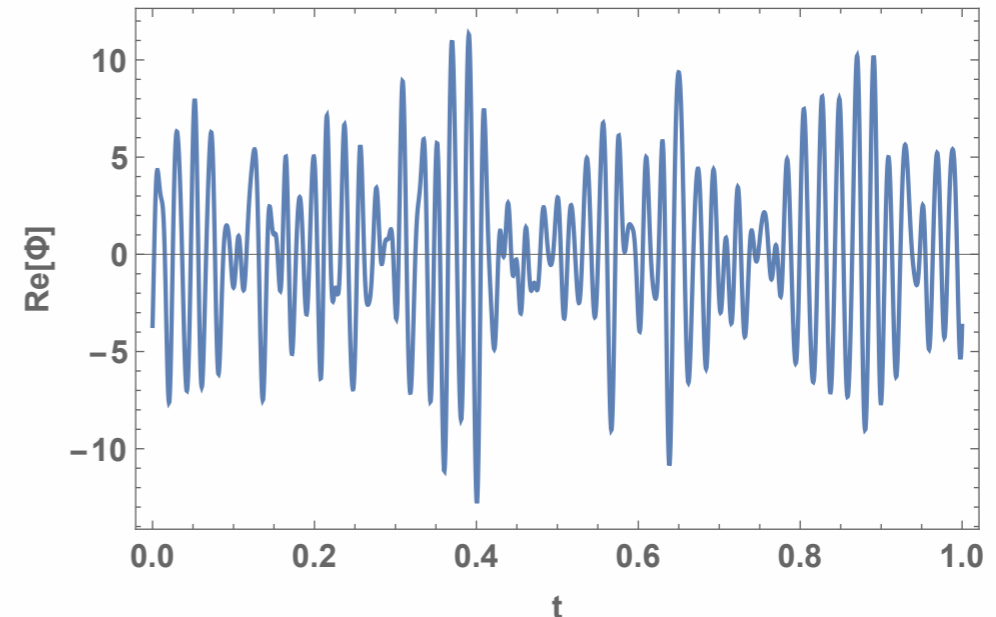
$$S_0 \propto \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \tau_c^{-2}}$$

- temporal wave form

**coherent**  $\omega_0 \tau_c > 2\pi$

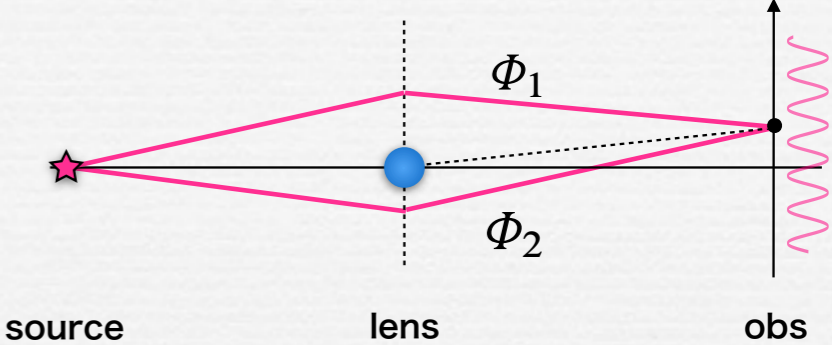


**incoherent**  $\omega_0 \tau_c < 2\pi$



# Coherence of Waves in Gravitational Lensing

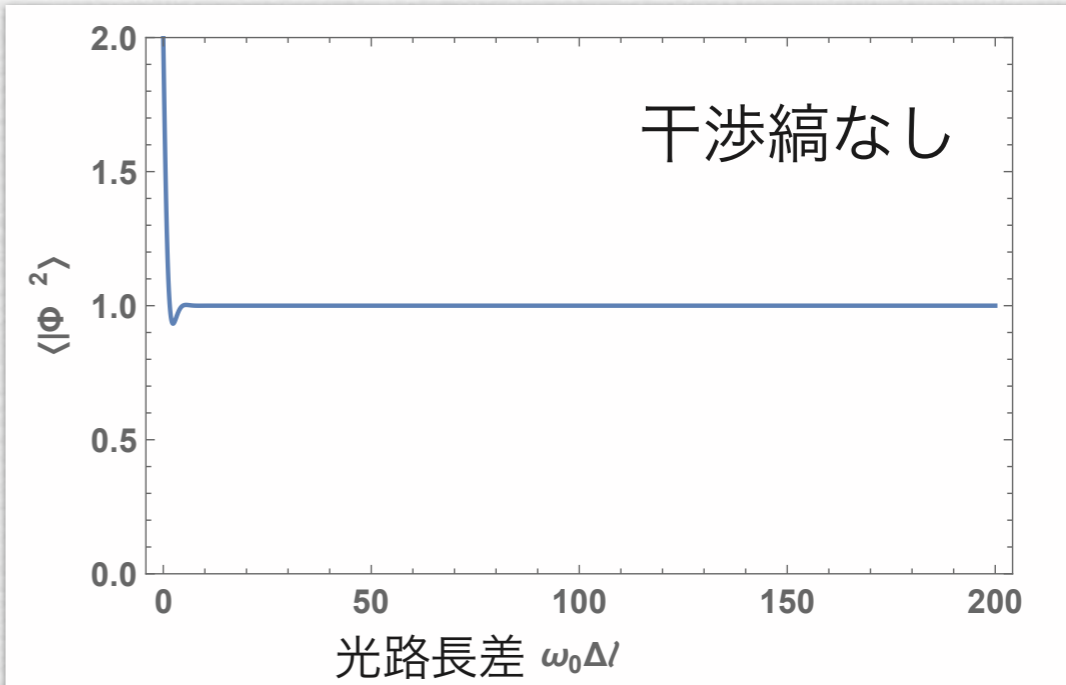
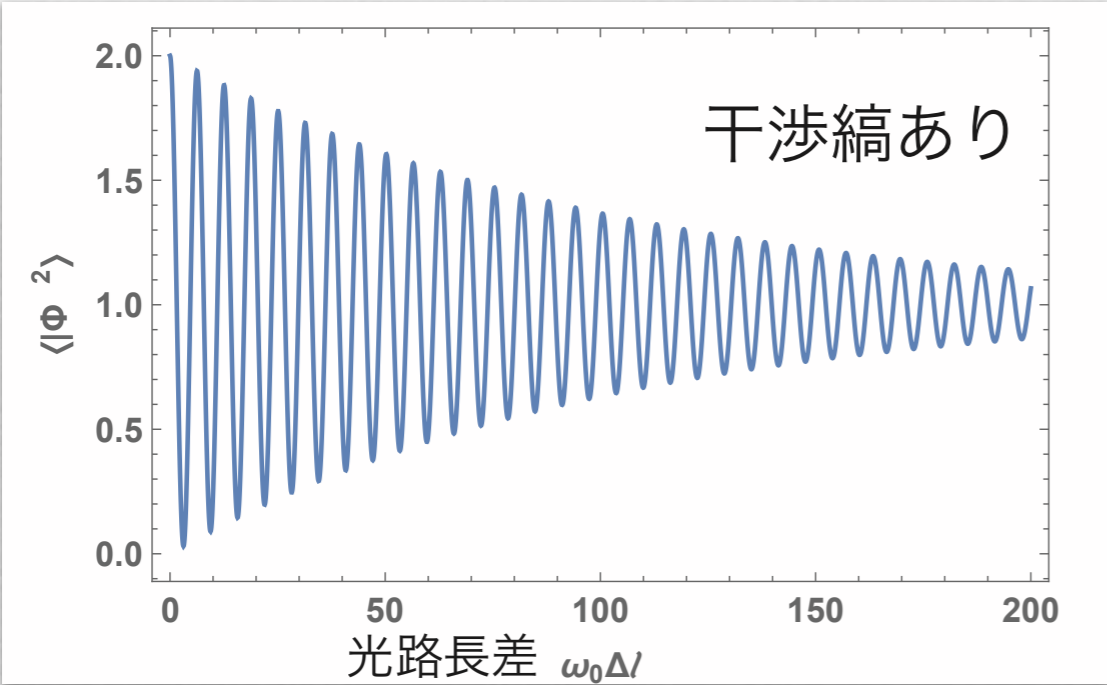
$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \Phi_1(t) + \Phi_2(t) & \Delta l &: \text{光路長差} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega a(\omega) e^{-i\omega t} + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega a(\omega) e^{-i\omega(t+\Delta l)} \end{aligned}$$



空間強度分布  $\langle |\Phi|^2 \rangle \propto 1 + \cos(\omega_0 \Delta l) e^{-\Delta l / \tau_c}$

coherent  $\Delta l < \tau_c$

incoherent  $\Delta l > \tau_c$



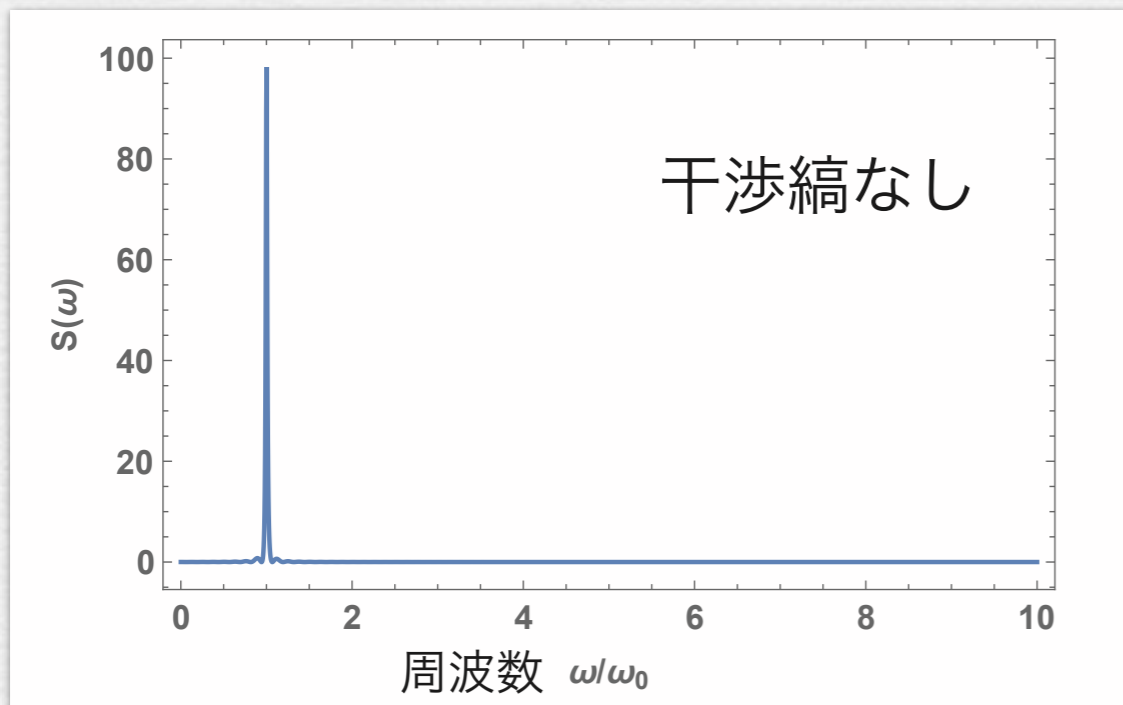
干渉縞の間隔  $(\Delta l)_2 - (\Delta l)_1 \sim \frac{1}{\omega_0}$

# 周波数強度分布 (パワースペクトル)

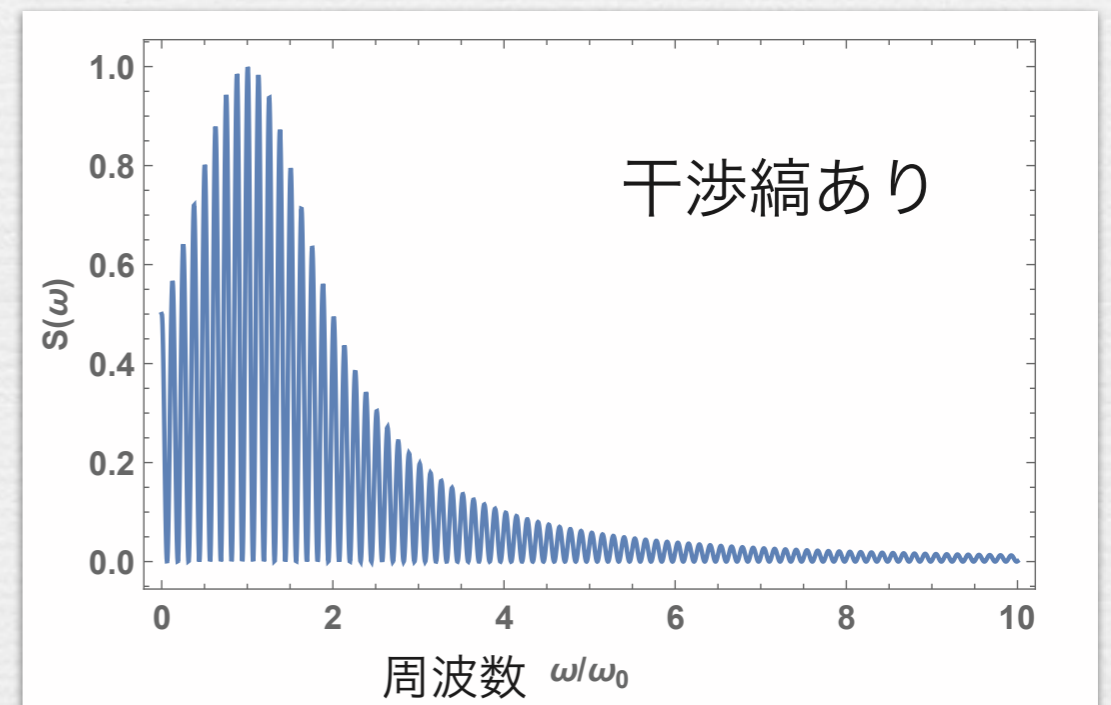
$$S(\omega) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle \Phi^*(t) \Phi(t + \tau) \rangle$$

$$\propto \frac{\tau_c^{-1}}{(\omega - \omega_0)^2 + \tau_c^{-2}} \cos^2 \left( \frac{\Delta l \omega}{2} \right)$$

**coherent**  $\Delta l < \tau_c$



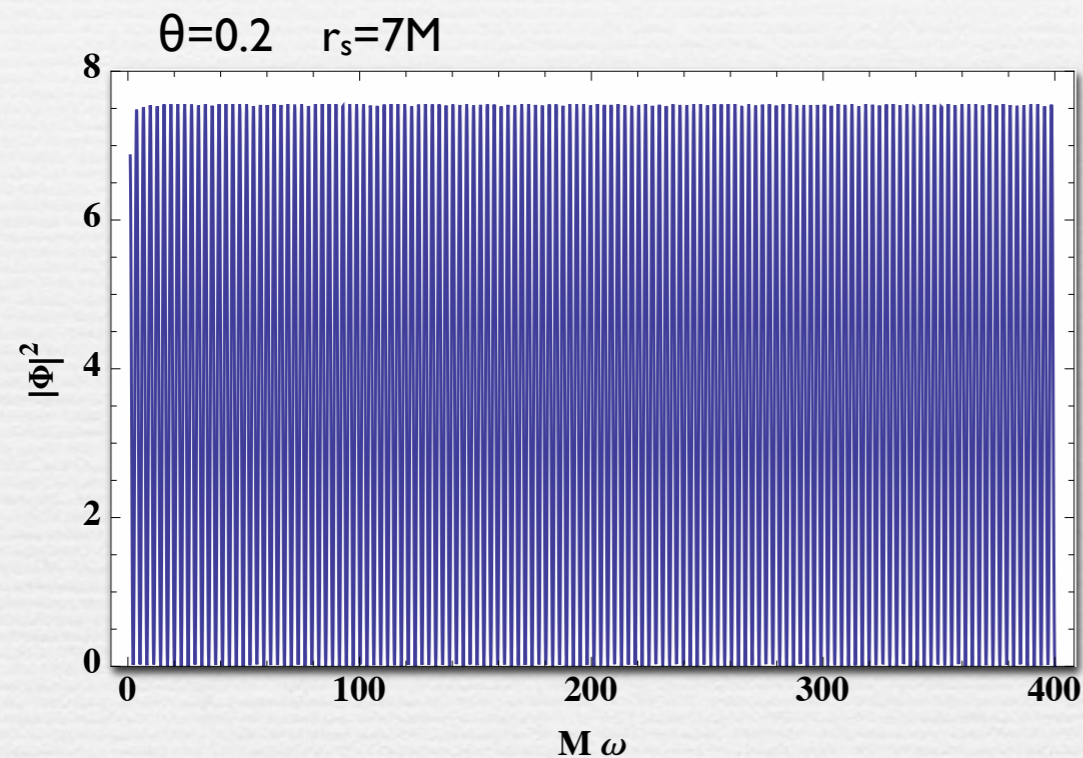
**incoherent**  $\Delta l > \tau_c$



干渉縞の間隔  $\Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta l}$

# 光源のコヒーレンス時間が短くても、周波数領域（パワースペクトル）には干渉効果が現れる

- for a point mass lens



$$\Delta\omega \sim \frac{1}{M}$$

femto-lensing of gamma ray burster

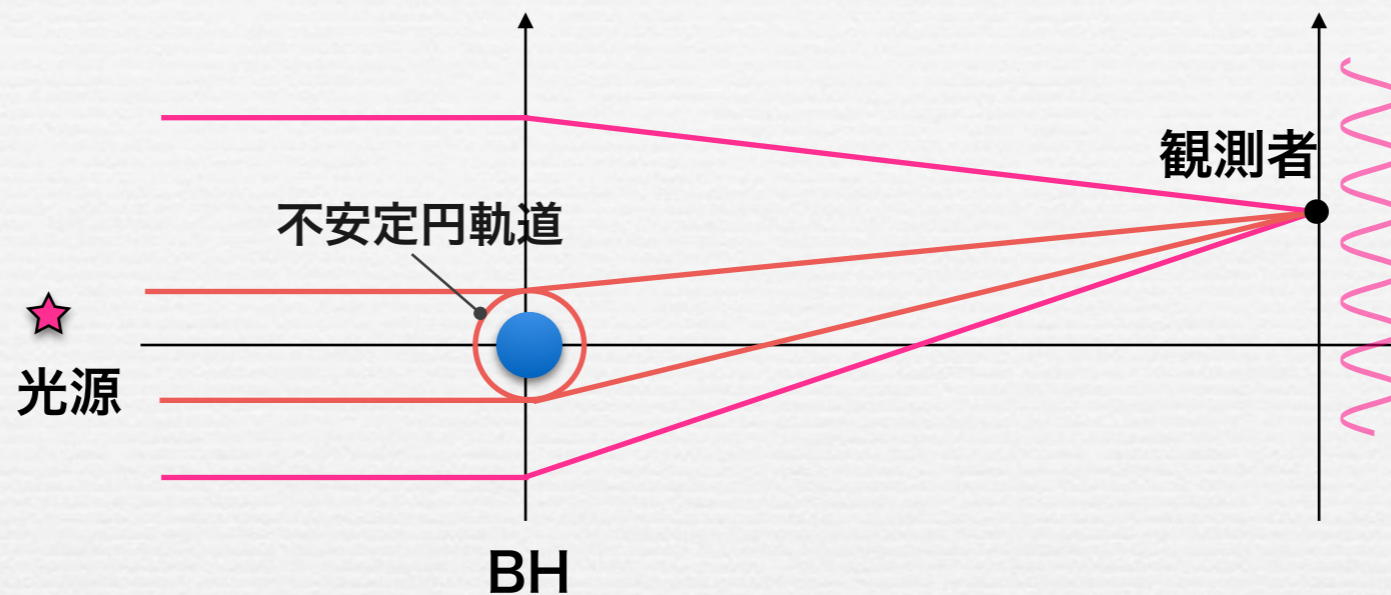
*A. Gould 1992*

$$M \sim 10^{-16} M_{\odot}$$

$$\theta_E \sim \text{femto-arcsec} \\ 10^{-15}$$

重力源（レンズ天体）の質量が推定できる

# BH重力レンズ系における干渉効果



## 不安定円軌道の存在 (BH shadowに対応)

## それに伴う干渉効果とパワースペクトルへの影響

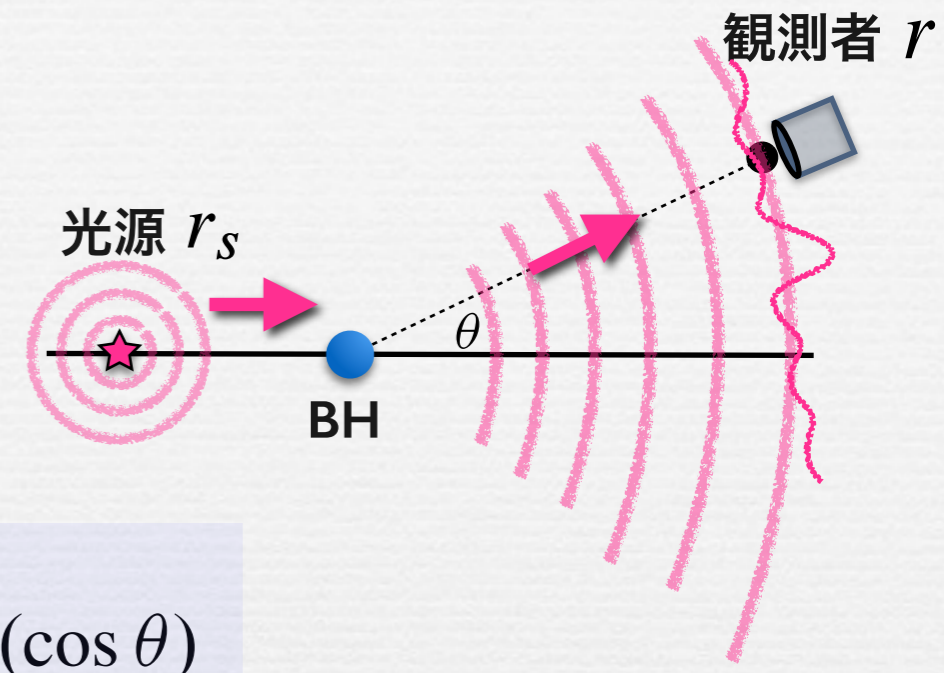
パワースペクトルを用いてBH時空の直接検証が可能か？

- 波の散乱問題：解析的取り扱い
- レンズ方程式の導出
- 散乱波の評価
- power spectrumに現れうるBH時空の特徴

# Wave Scattering Theory in BH Spacetimes

- wave scattering problem

$\square\Phi = S$  massless scalarを定常問題として解く  
 $\Phi \propto e^{-i\omega t}$



Green関数の部分波展開

$$\Phi(r, \theta) = \frac{e^{-i\omega t} i\omega}{4\pi} \sum_{\ell} (2\ell + 1)(-)^{\ell} R_{\ell}^{(1)}(r) R_{\ell}^{(2)}(r_s) P_{\ell}(\cos \theta)$$

$R_{\ell}^{(1)}$  : 中心領域でregular  
 $R_{\ell}^{(2)}$  : pure outgoing

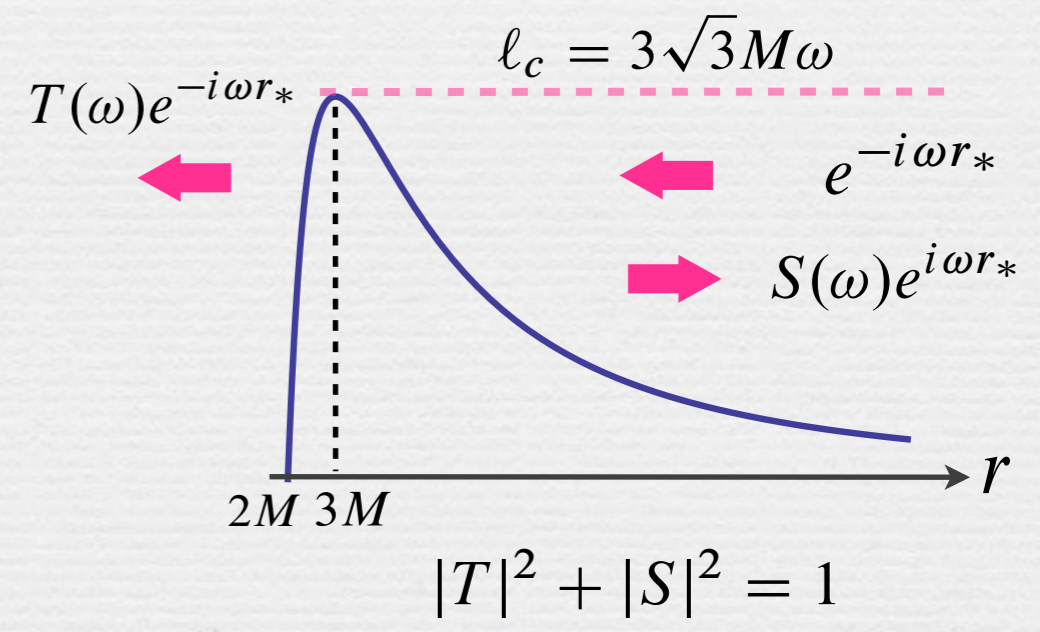
$r \rightarrow \infty$

この項まで取り入れる

$$R_{\ell}^{(1)} \sim \frac{1}{\omega r} \sin \left( \omega r_* - \frac{\pi\ell}{2} + \delta_{\ell} + \frac{(\ell + 1/2)^2}{2\omega r} + \dots \right)$$

phase shift

$$R_{\ell}^{(2)} \sim \frac{-i}{\omega r} \exp \left( \omega r_* - \frac{\pi\ell}{2} + \delta_{\ell} + \frac{(\ell + 1/2)^2}{2\omega r} + \dots \right)$$



phase shift  
 $S_{\ell} = e^{2i\delta_{\ell}}$

# Improved formula of Scattering Wave

$$\Phi \approx \frac{e^{i\omega(r_* + r_{s*})}}{4\pi i \omega r r_s} \sum_{\ell} \left( \ell + \frac{1}{2} \right) e^{i \frac{(\ell + 1/2)^2}{2\omega} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_s} \right)} e^{2i\delta_{\ell}} P_{\ell}(\cos \theta)$$

アイコナール極限（短波長）での評価

$$\text{impact parameter } b \leftrightarrow \frac{\ell}{\omega} \gg \text{wave length } \frac{1}{\omega}$$

$$\longleftrightarrow \ell \gg 1$$

## ■ Poisson sum formula

$$P_{\ell}(\cos \theta) \sim J_0(\ell\theta)$$

和を積分に換える

$$\begin{aligned} \Phi &\propto \sum_{\ell} F(\ell + 1/2) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} d\lambda F(\lambda) e^{i2\pi m(\lambda - 1/2)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} db b e^{i\omega \frac{b^2}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_s} \right)} e^{2i\delta_{b\omega - 1/2}} J_0(b\omega\theta) e^{i2\pi m(b\omega - 1/2)} \end{aligned}$$

# Stationary phase condition: lens equation

$$b \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_s} \right) = -\Theta(b) - 2\pi m \pm \theta, \quad \Theta(\lambda) \equiv 2 \frac{d\delta_\lambda^{\text{WKB}}}{d\lambda}$$

$m$  : winding number

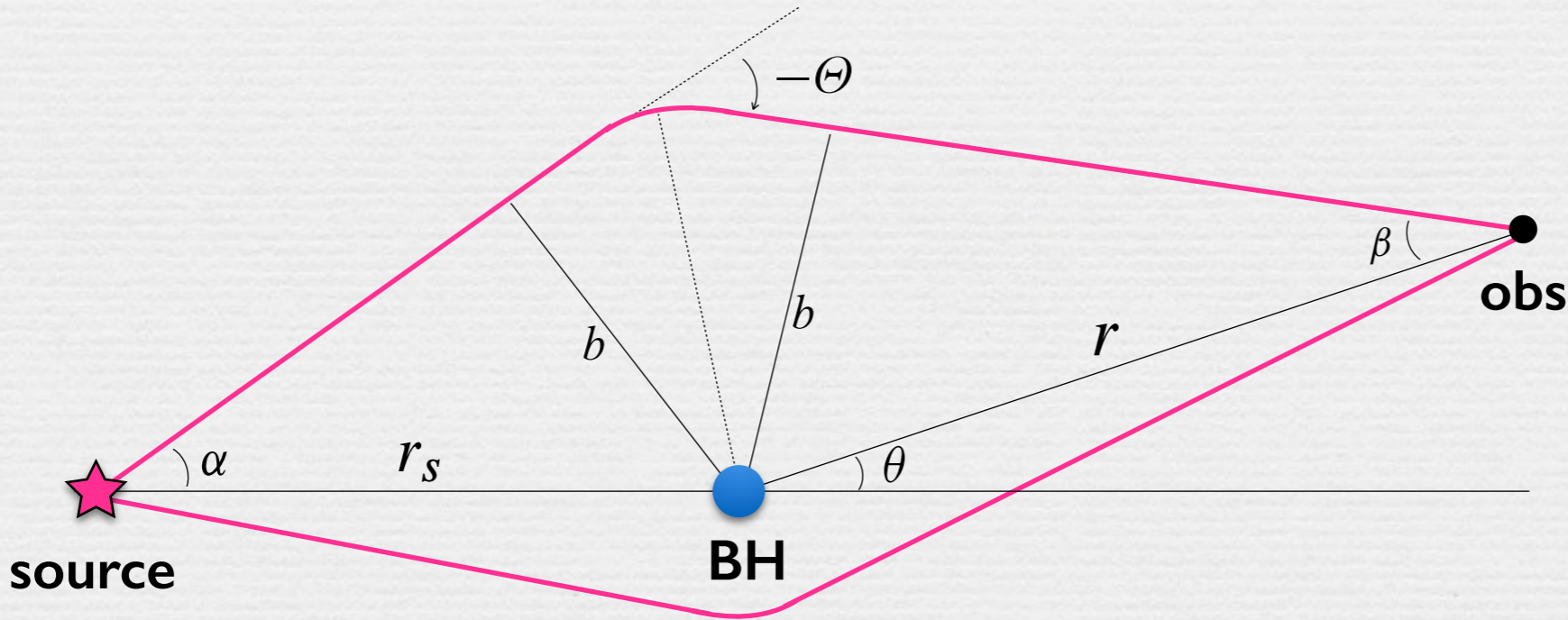
scattering angle

散乱角が大きくても  
成立する公式

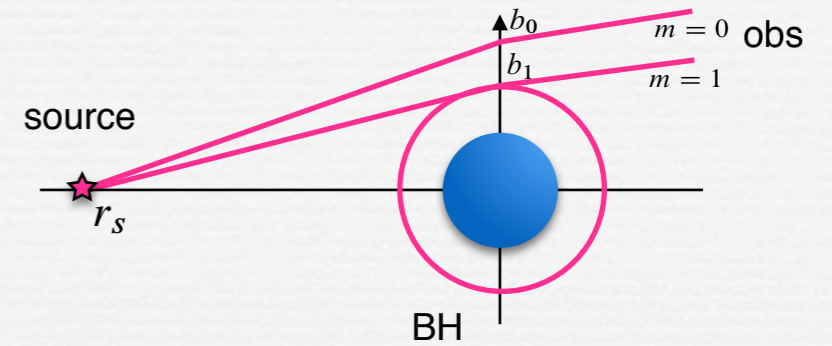
散乱角は $2\pi$ を超し  
てもかまわない

成立条件

$$\frac{b}{r}, \frac{b}{r_s} \ll 1$$



# Evaluation of Scattering Wave



$$\Phi \propto$$

$$\int_0^\infty d\lambda \lambda e^{i \frac{\lambda^2}{2\omega} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_s} \right)} e^{2i\delta_{\lambda-1/2}} J_0(\lambda\theta)$$

Fresnel-Kirchoff diffraction formula  $2\delta_{\lambda} \Leftrightarrow$  lens potential

primary wave

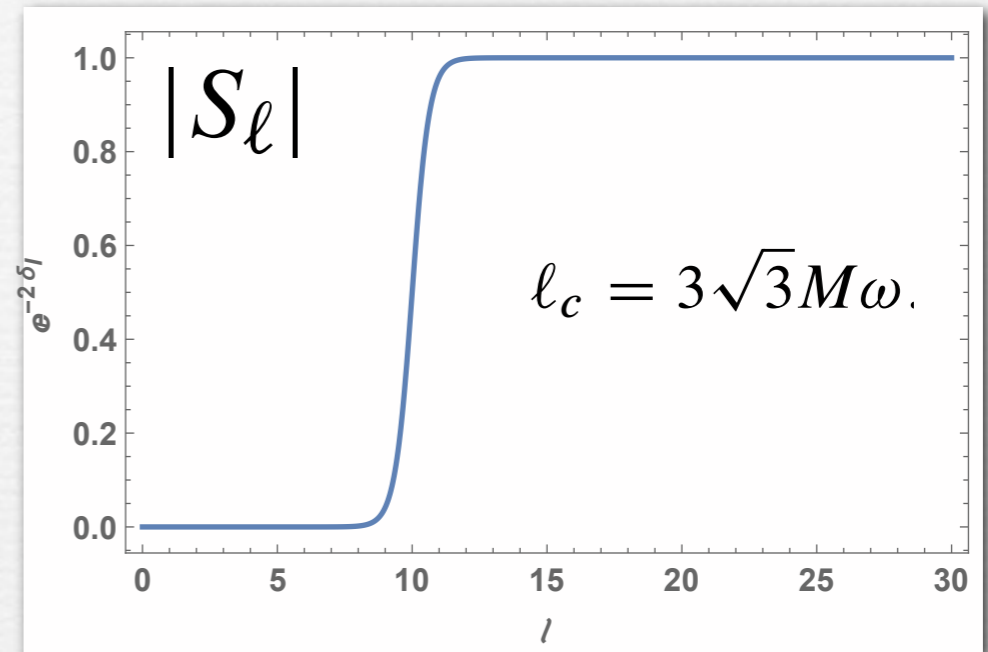
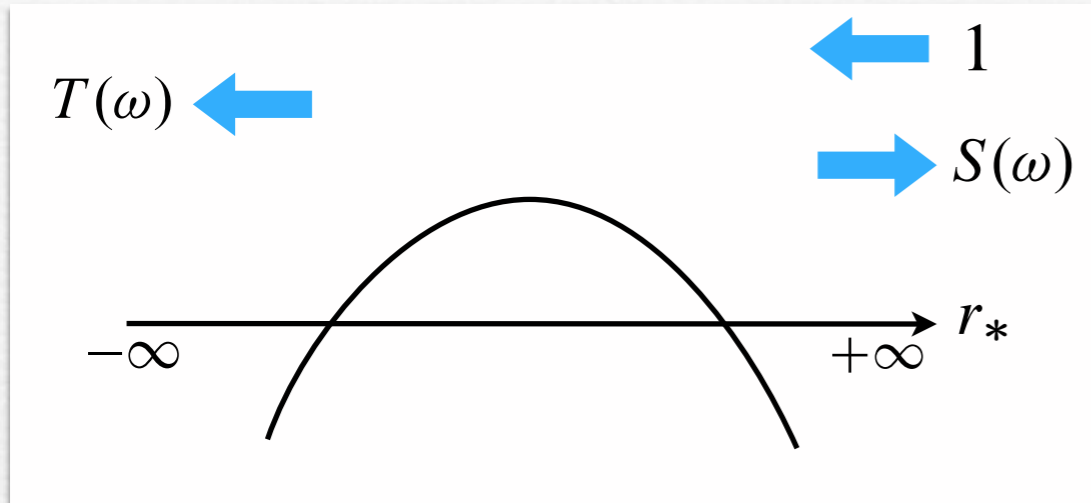
$$+ \sum_{m \neq 0} \int_0^\infty d\lambda \lambda e^{i \frac{\lambda^2}{2\omega} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_s} \right)} e^{2i\delta_{\lambda-1/2}} J_0(\lambda\theta) e^{i2\pi m(\lambda-1/2)}$$

winding wave

BH時空における  $e^{2i\delta_{\lambda-1/2}}$  の振舞い

**S function**  $S_\ell \equiv e^{2i\delta_\ell}$

反射係数



critical impact parameter  $3\sqrt{3}M$

● **primary wave**の評価

クーロン散乱のphase shiftで近似 散乱角  $\Theta(b) = -\frac{4M}{b}$

$$\int_{\lambda_c}^{\infty} d\lambda \lambda e^{i\frac{\lambda^2}{2\omega\tilde{r}} - i4M\omega \ln \lambda} J_0(\lambda \theta),$$

$$\lambda_c = 3\sqrt{3}M\omega$$

$$\propto i\omega\tilde{r} \times e^{i2M\omega \ln 2M\omega} e^{\pi M\omega} \Gamma(1 - i2M\omega) e^{\frac{i}{4}\omega\tilde{r}\theta^2} J_0(\sqrt{4M\tilde{r}}\omega\theta) + O(\omega^{-1/2})$$

effect of Fresnel diffraction

# ● winding waves

$$S_\ell = \frac{e^{i\pi\nu}}{\sqrt{2\pi}} R^2 \Gamma(-\nu), \quad R^2 = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)^{\nu+1/2} e^{-(\nu+1/2)}, \quad \nu + \frac{1}{2} = \frac{i}{2\ell} (27(M\omega)^2 - \ell^2)$$

poles in complex  $\lambda$  plane (Regge pole)

不安定円軌道の存在により現れる  
(QN modeに対応)

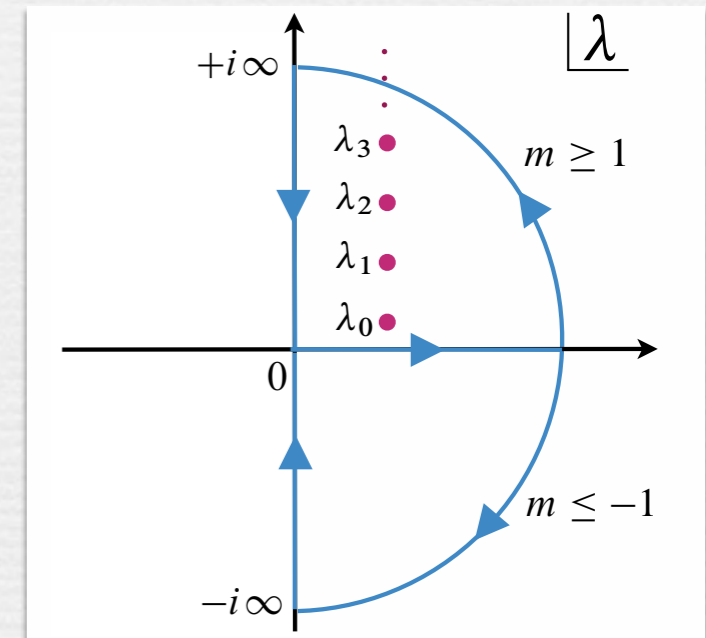
$$S_{\lambda-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda - \lambda_n}, \quad \lambda_n = 3\sqrt{3} M\omega + i \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad \gamma_n = -\frac{i e^{i\pi n}}{\sqrt{2\pi}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Cauchyの積分定理を用いて評価

$$\sum_{m \neq 0} \int_0^\infty d\lambda \left[ \dots S_\lambda \dots \right] =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n e^{i \frac{\lambda_n^2}{2\omega\tilde{r}}} (2\pi i \gamma_n) J_0(\lambda_n \theta) e^{i 2\pi m (\lambda_n - 1/2)} + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{+i\infty} d\lambda + \sum_{m=-1}^{-\infty} \int_0^{-i\infty} d\lambda$$

$$\approx \pi e^{-\pi} e^{-i\pi/4} (\lambda_c \sqrt{\omega\tilde{r}}) e^{i \frac{\lambda_c^2}{2\omega\tilde{r}}} e^{2i\pi\lambda_c} J_0(\lambda_c \theta)$$



結局, BHによる散乱波は次のように求まる:

primary wave

winding wave

$$\Phi \approx e^{i\omega\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_s}\right)^{-1}} \left[ c_1 J_0(b_E \omega \theta) + c_2 J_0(b_c \omega \theta) \right]$$

$$b_E = \sqrt{\frac{4Mrr_s}{r+r_s}}$$

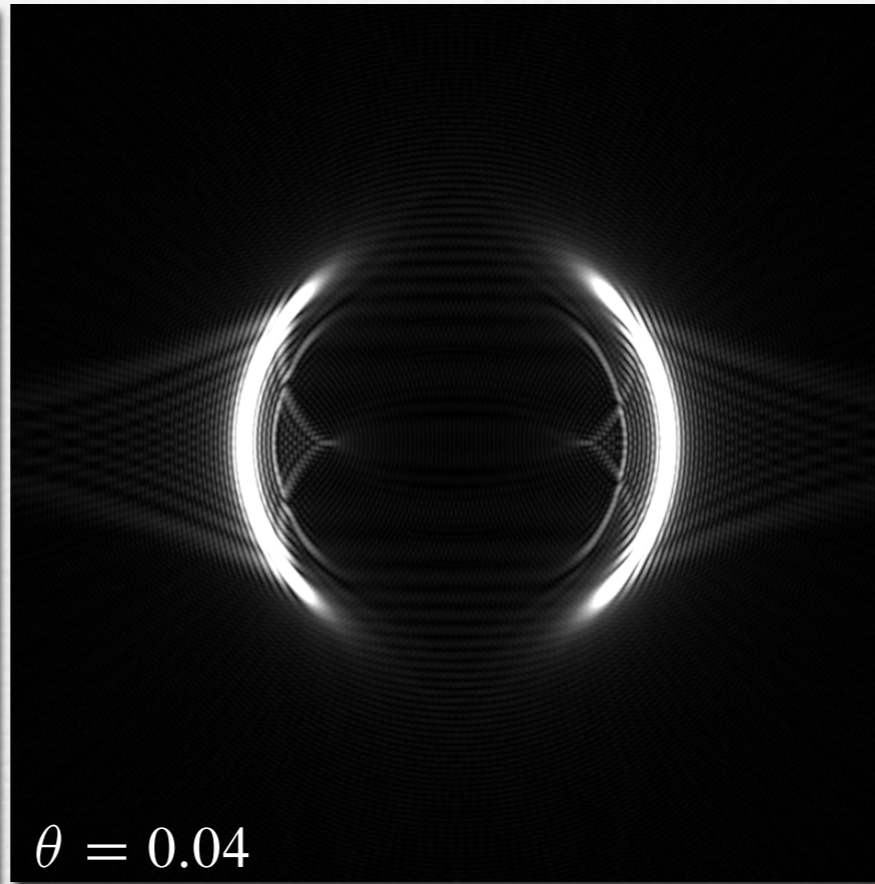
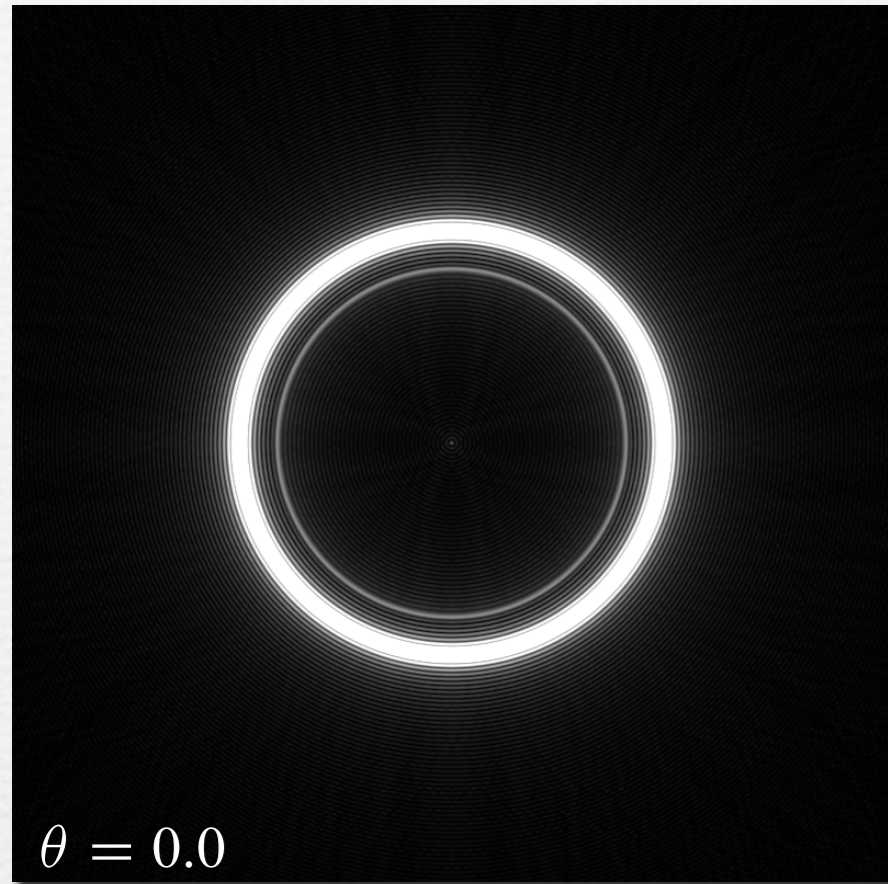
$$b_c = 3\sqrt{3}M$$

$$|c_1| \approx \sqrt{2\pi M\omega}$$

$$|c_2| \approx 3\sqrt{3}\pi e^{-\pi} \sqrt{M^2\omega \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_s}\right)}$$

# Wave Optical Image of BH

scattering waveのFourier変換

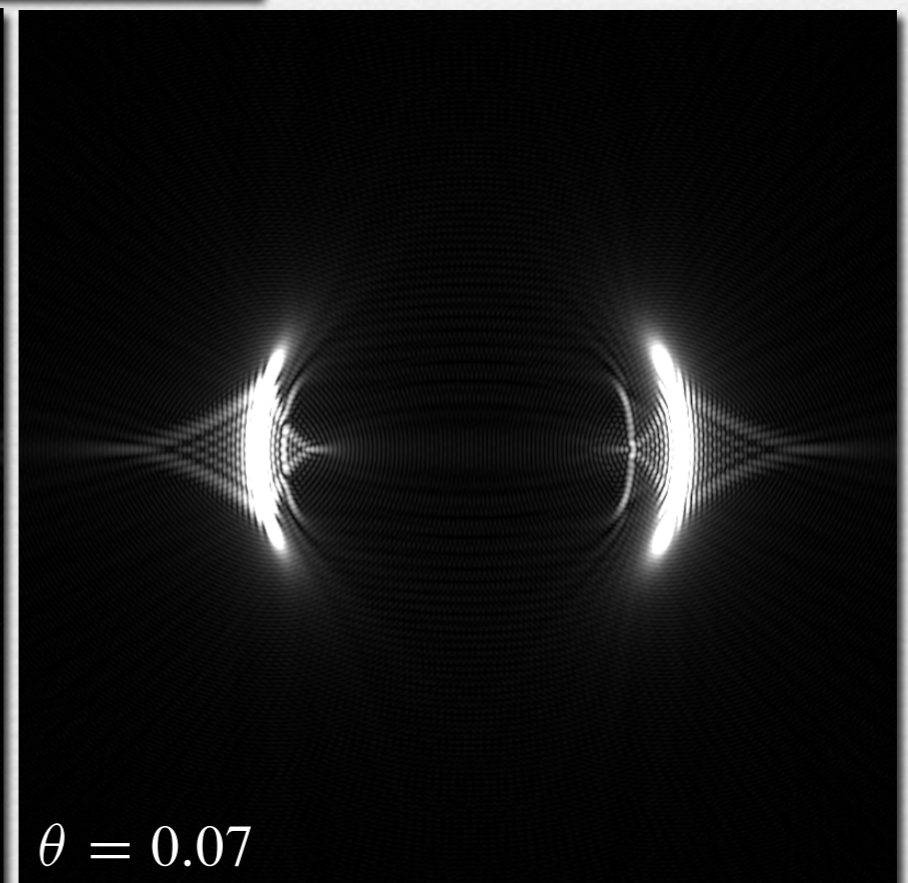
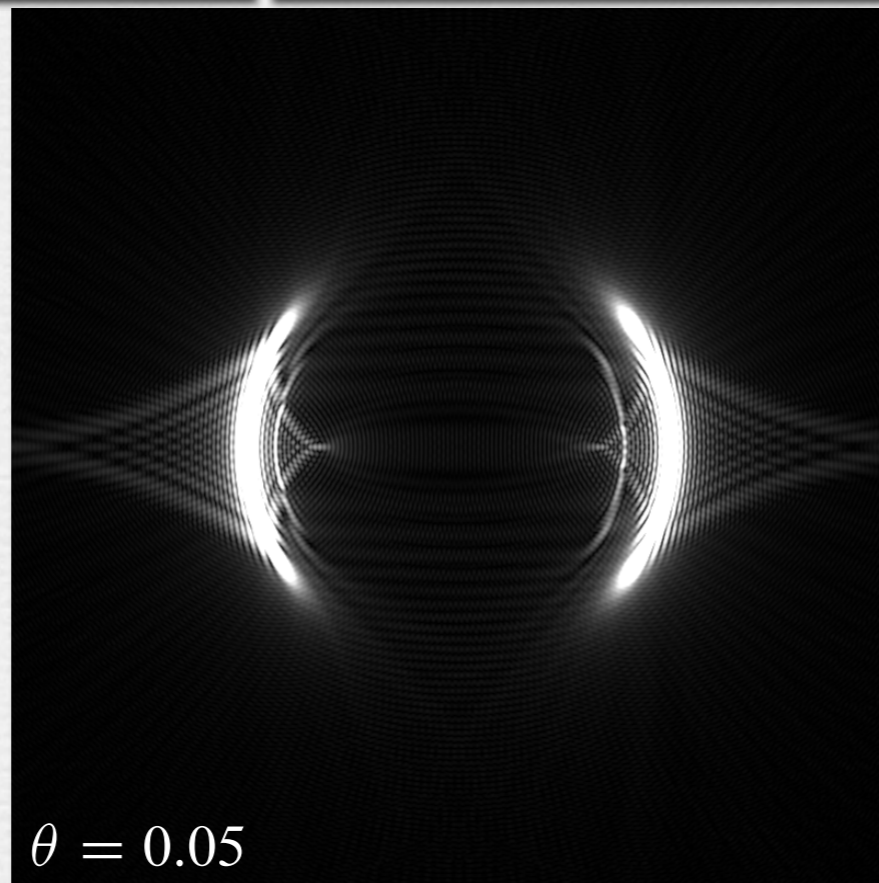


$$M\omega = 800$$

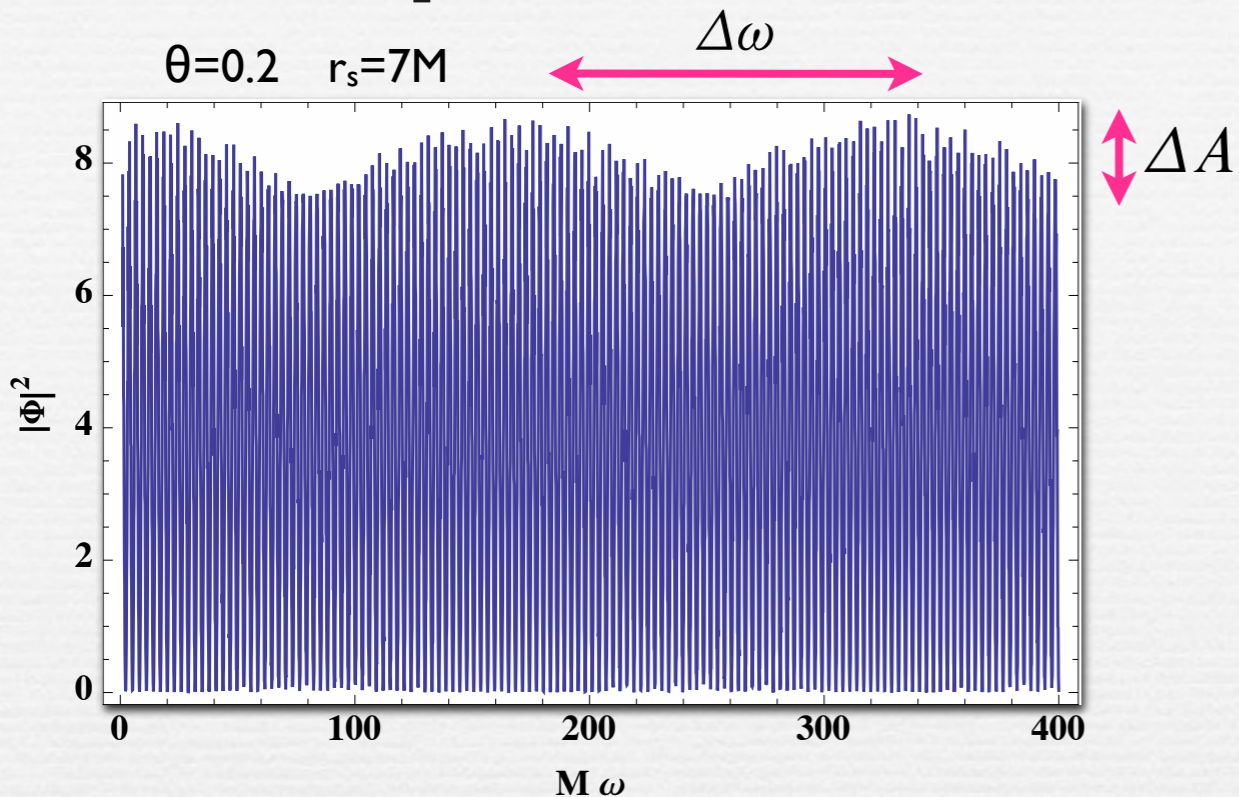
$$r_s = 10M$$

$$\delta = 0.03 \quad \text{size of aperture}$$

Einstein ring  
photon sphere



# Power Spectrum (sourceはwhite noise)



$$\frac{\Delta A}{A} \sim 0.1 \left( \frac{r_s}{7M} \right)^{-1/2}$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}M\theta} \left( \sqrt{\frac{r_s}{27M/4}} - 1 \right)^{-1}$$

interference between  $m = 0$  and  $m \geq 1$  rays



“beat” in the power spectrum

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_{m=1}$$

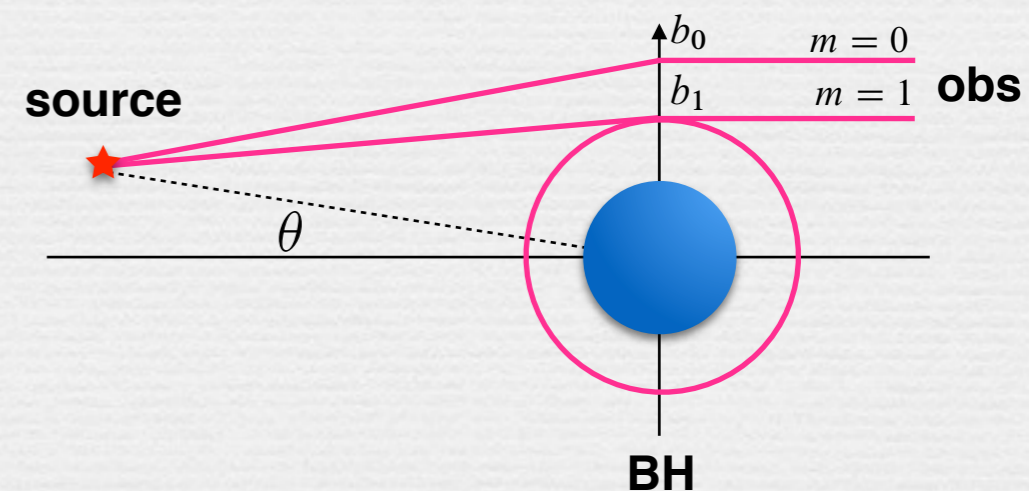
$$|\Phi|^2 = |\Phi_0|^2 + 2\text{Re}[\Phi_0\Phi_1^*] + |\Phi_1|^2$$

interference term

$$\sim 0.1|\Phi_0|^2$$

intensity of winding ray

$$\sim 0.002|\Phi_0|^2$$



幾何光学での評価

$$|\Phi_1|^2 \sim e^{-2\pi} |\Phi_0|^2 \sim 0.0019 |\Phi_0|^2$$

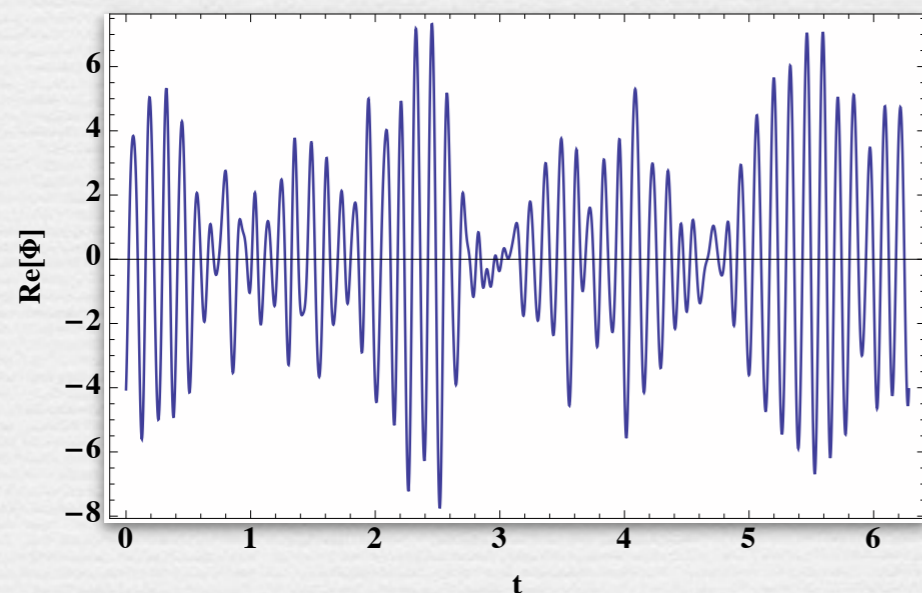
$$|\Phi_1| \sim 0.04 |\Phi_0|$$

# Power Spectrumに現れる「うなり」の振動数

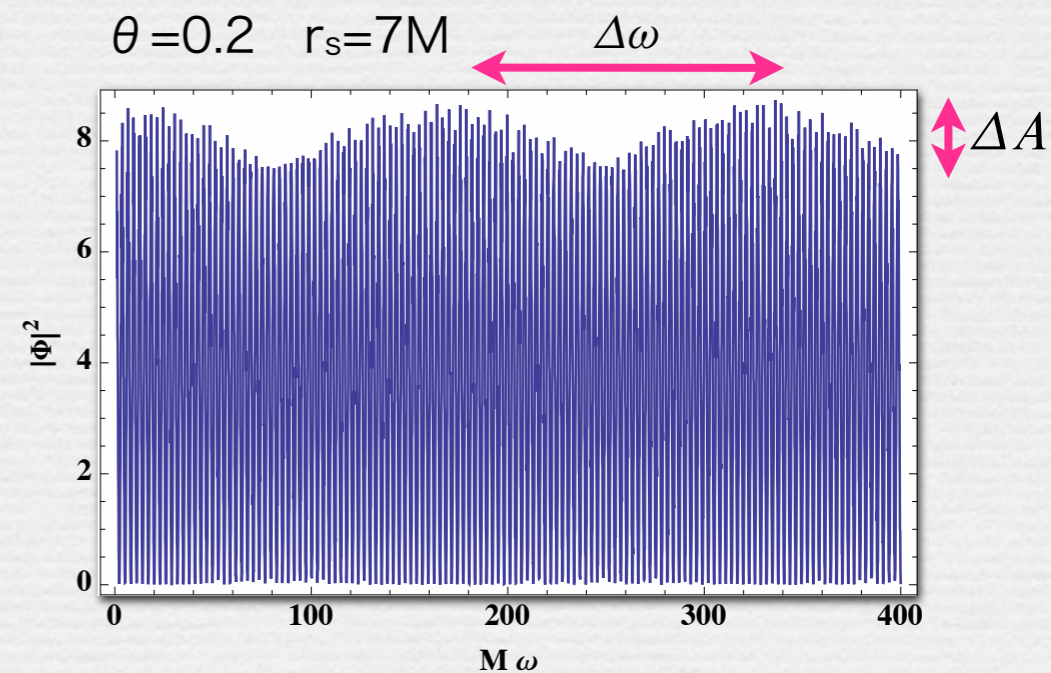
$$r_s = 7M$$

	$10^6 M_\odot$ galactic core BH	$10^3 M_\odot$ intermediate mass BH	$10 M_\odot$ stellar mass BH
$\Delta A/A$	0.1	0.1	0.1
$\Delta\omega$ $\theta = 0.2$	280Hz	280kHz	28MHz
$\Delta\omega$ $\theta = 0.02$	2.8kHz	2.8MHz	280MHz

時間波形

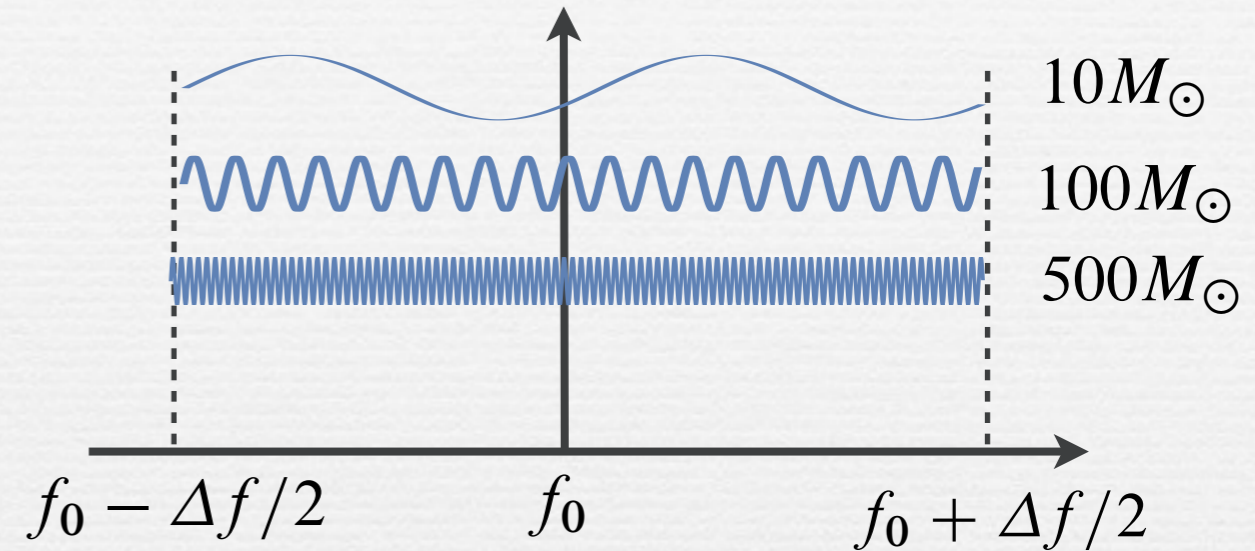


Fourier変換



# 測定可能性

中心周波数	$f_0 = 100\text{GHz}$
帯域幅	$\Delta f = 500\text{MHz}$
周波数分解能	100kHz



野辺山45m

参考：宇宙の観測II 電波天文学  
中井・坪井・福井（編）

## パワースペクトルを用いた「BH shadow」の検証

$10M_{\odot} \sim 1000M_{\odot}$  に対しては可能？

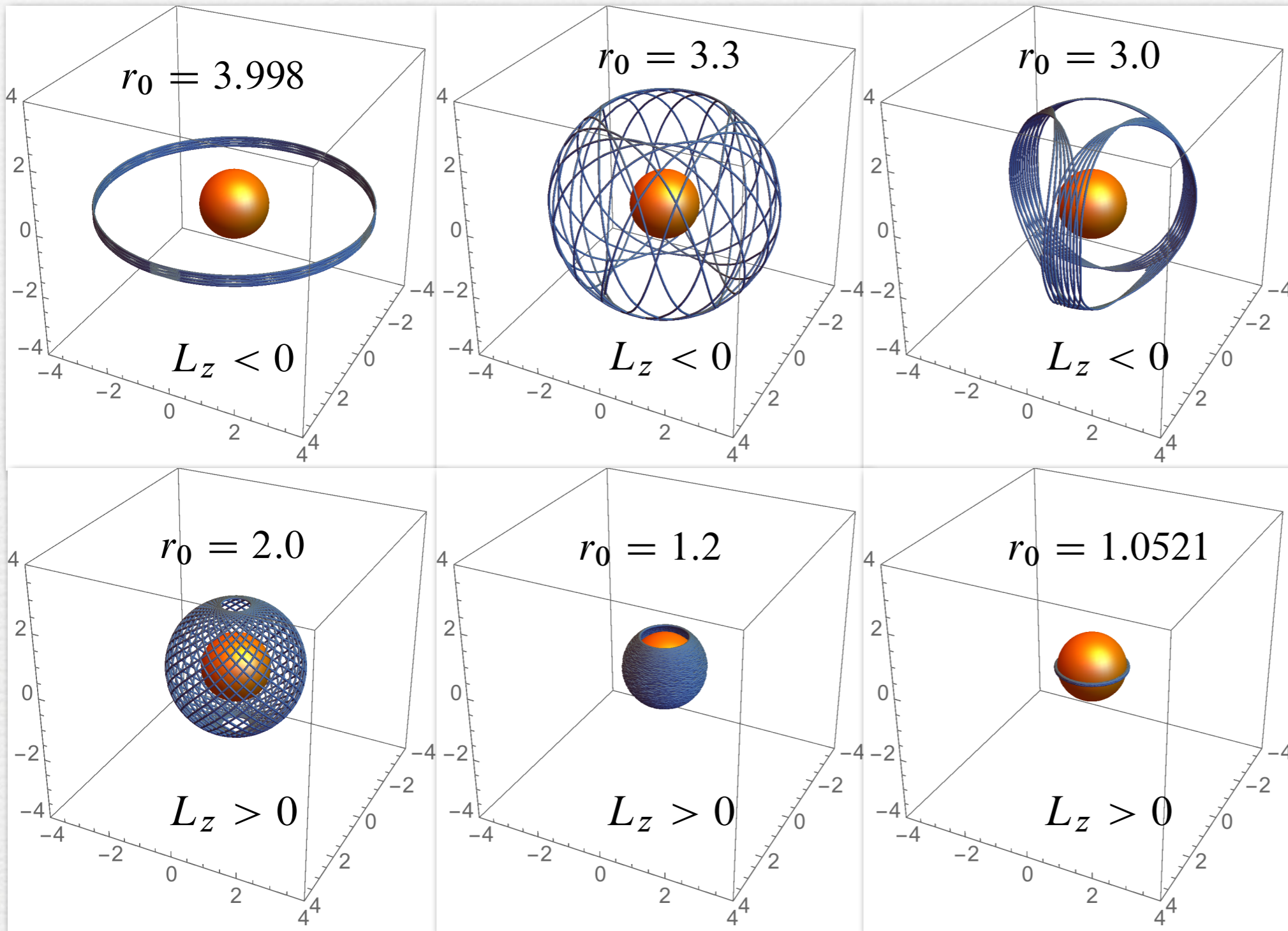
検出可能なBHの質量上限値は周波数分解能で決まる

質量下限値は帯域幅で決まる

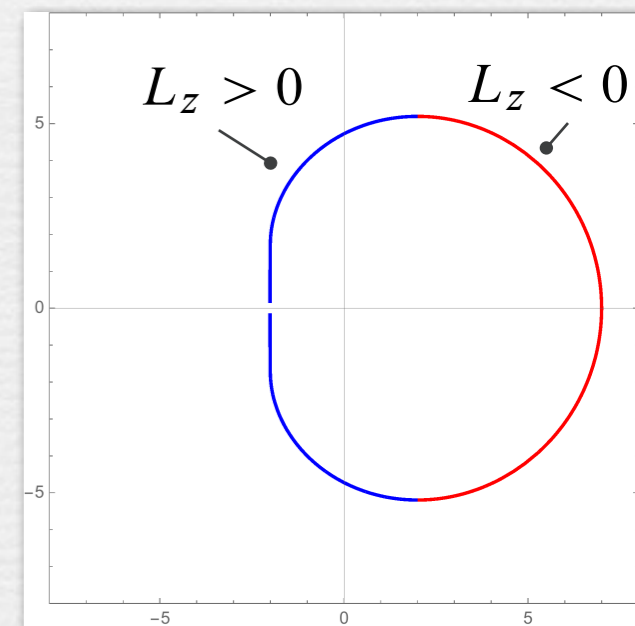
# Summary

- 散乱理論を用いたBH時空での波動の振舞い
- S functionのpoleの寄与：unstable orbit (QN mode)      winding wave
- Schwarzschild BHに対する解析的表式
  - image of BH
  - power spectrumにおけるうなり
    - unstable orbitの存在による干渉効果
    - BH時空の観測的検証？
- 現実のBH周辺環境
  - クリーンでない（プラズマの影響），観測周波数で回避可？
  - 光源の場所，運動の影響（disk）
- Kerr BHでの評価

# Kerr BH : 光の不安定円軌道 $a = 0.999$



## shadowの輪郭



BH spinの効果はどのような形でパワースペクトルに現れるか？  
(shadowの輪郭の形)